7.3. В кубический аквариум с длиной ребер *D*, доверху наполненный водой, медленно опустили на дно шар диаметром *D*, в результате чего часть воды вылилась. После этого шар вынимают, и опускают новый шар диаметром $d = D/2$. Чему равно расстояние *x* от дна аквариума до поверхности воды в нем после опускания второго шара? Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где *R* – радиус шара.

Решение.

Объем воды в аквариуме, доверху заполненного водой:

$$V_0 = D^3. \qquad (1)$$

Объем первого шара:

$$V_D = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6}D^3. \qquad (2)$$

При погружении шара в аквариум выливается объем воды, равный объему шара. Останется воды:

$$V_1 = V_0 - V_D = D^3 - \frac{\pi}{6}D^3 = D^3\left(1-\frac{\pi}{6}\right). \qquad (3)$$

Объем второго (маленького) шара:

$$V_d = \frac{\pi}{6}d^3. \qquad (4)$$

Допустим, что второй шар полностью скрыт под водой. Тогда суммарный объем воды и второго шара:

$$V_2 = V_1 + V_d = D^3\left(1-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}d^3. \qquad (5)$$

С другой стороны,

$$V_2 = D^2 x, \qquad (6)$$

где *x* – искомый уровень воды. Приравнивая выражения (5) и (6), получаем:

$$D^3\left(1-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}d^3 = D^2 x;$$

$$x = D\cdot\left(1-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\frac{d^3}{D^2}. \qquad (7)$$

Подставляя $d = D/2$, получаем:

$$x = D\cdot\left(1-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\cdot\frac{D}{8} = D\frac{48-7\pi}{48} \approx 0{,}542\cdot D. \qquad (8)$$

Поскольку $x > d$, то предположение о том, что второй шар скрыт под водой, справедливо.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула (1) для объема воды в аквариуме	1
2	Записана формула (2) для объема первого шара через его диаметр	1
3	Найден объем оставшейся воды (3)	1
4	Записана формула (4) для объема второго шара через его диаметр	1
5	Записано и проверено предположение, что второй шар полностью скрыт под водой	2
6	Записан суммарный объем воды и второго шара (5)	1
7	Записано выражение (6) для объема воды и шара через уровень жидкости	1
8	Получен ответ $x \approx 0,542 \cdot D$.	2
	Сумма	**10**